

المماس عند  $t=0$  يكون

لذا،  $\vec{R}$  هو متجه المماس لمخفي اللولب الدائري

المماس للولب الدائري تعطى معادلته بالشكل:

$$R = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad a, b > 0$$

$$\vec{T} = R' = (-a \sin t, a \cos t, b) \Rightarrow \vec{T} = \frac{R'}{|R'|} = \frac{(-a \sin t, a \cos t, b)}{c}$$

$$|R'| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$$

$$= \left( -\frac{a}{c} \sin t, \frac{a}{c} \cos t, \frac{b}{c} \right)$$

12) لكي نرى المتغيرات الآتية:

$$r_1(t) = (t^3, 0, 0) \quad ? \text{ هل هي نقطة في } t=0$$

$$r_1'(t) = (3t^2, 0, 0) \big|_{t=0} = (0, 0, 0)$$

بما أن  $r_1'(t) = 0$  عند النقطة  $t=0$  أي في الأصل  $t=0$  فالمتغير غير نظامي.

$$r_2(t) = (t^3 + t, 0, 0)$$

$$r_2'(t) = (3t^2 + 1, 0, 0) \big|_{t=0} = (1, 0, 0)$$

والناتج المتغير نظامي لأن مشتق المتجه للمخفي  $t=0$  لا يساوي الصفر.

13) لكي نرى المتغير:

$$y = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

هل يشك هذا المتغير متغيراً أم لا عند  $x=0$  ؟

$$y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x} = 0$$

دالة محدودة      دالة محدودة

بما أن المشتق الأول  $= 0$  (ما زال) فالمتغير غير أملي.

الوسيط الطبيعي من أهم تطبيقات الوسيط الطبيعي في التقويمات

لإيجاد معادلة المنحنى من الوسيط  $t$  إلى الوسيط  $s$

مثال: إذا كان لدينا المنحنى:

$$r(t) = (a \cos t, a \sin t, 0) \quad a > 0$$

أوجد الوسيط الطبيعي  $s$  ثم اكتب معادلة المنحنى بدلالة  $s$

$$r'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0) \quad \text{الحل:}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + 0} = \sqrt{a^2} = a$$

$$s = \int_0^t a \, d\tau = a\tau \Big|_0^t = at \Rightarrow t = \frac{s}{a}$$

أوجد الوسيط الطبيعي لمنحنى اللولب

إذا كان لدينا المنحنى  $r(t) = (t, t^2, 0)$  أوجد الوسيط الطبيعي  $s$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad \text{المستوى المماس}$$

نحسب: أوجد معادلة المستوى المماس للمنحنى:  $r(t) = (t, t^2, t^3)$  عند النقطة

$$s, t=1$$

الحل:  $M(x, y, z)$  نقطة اختيارية من المماس

$$r(1) = (1, 1, 1)$$

$$r'(t) = (1, 2t, 3t^2) \Big|_{t=1} = (1, 2, 3)$$

$$r''(t) = (0, 2, 6t) \Big|_{t=1} = (0, 2, 6)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{معادلة المماس عند النقطة}$$

$t=1$  هي:

$$\Rightarrow 3x - 3y + z = 1$$

معادلة المستوي المماس عند  $t = t_0$  هي  $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

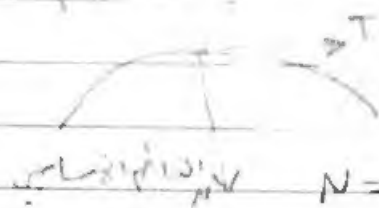
$x_0 = x(t_0)$   
 $y_0 = y(t_0)$   
 $z_0 = z(t_0)$

تمرين: أوجد معادلة المستوي المماس للحنى  $r(t) = (t, t^2, t^3)$  عند النقطة  $t=1$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

الحل:

$$2x - y = 1, \quad 3x - 2z = 1$$



$$T = \frac{R'}{|R'|}, \quad T = R'$$

$$N = \frac{\frac{dT}{ds}}{\left| \frac{dT}{ds} \right|} = \frac{T'}{|T'|}$$

$$B = T \times N$$

- المستوي الناطم: يحتوي  $B, N$  يعام  $T$
- المستوي العمود: يحتوي  $N, T$  يعام  $B$
- المستوي المماس: يحتوي  $B, T$  يعام  $N$

معادلات المستويات:

المستوي الناطم:  $(r(t) - r(t_0)) \cdot T = 0$

المستوي العمود:  $(r(t) - r(t_0)) \cdot N = 0$

تمرين: أوجد المستوي الناطم عند النقطة  $t=1$  للحنى  $r(t) = (t, t^2, t^3)$

الحل: نأخذ  $M(x, y, z)$  نقطة اختيارية

$$r(1) = (1, 1, 1)$$

$$T = \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3)$$

$$(x-1, y-1, z-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3) = 0$$

$$k_1 = \frac{R'(t)}{R(t)} \quad \text{the second}$$

$$k_1 = \frac{R' R''}{(R')^2}$$

$$k_2 = \frac{R' R'' R''' + R''^2}{(R' R'')^2}$$

$$k_3 = \frac{R'''}{R' R''}$$

$$\{y = f(x)\}$$

$$k_1 = \frac{R' R''}{(R')^2} \quad \text{the second}$$

$$k_2 = \frac{R' R'' R''' + R''^2}{(R' R'')^2}$$

$$k_3 = \frac{R'''}{R' R''}$$

$$R' R'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1, 2, 1)$$

$$|R' R''| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \quad \text{So } k_1 = \frac{R''}{R'} = \frac{R''}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$k_2 = \frac{R' R'' R''' + R''^2}{(R' R'')^2} \quad \text{the third}$$

$$k_2 = \frac{(R' R'' R''')}{(R'')^2}$$

the third

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

الحل: الوسيط الطبيعي للحنين  $S = c \cdot t$  ;  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$t = \frac{S}{c}$$

$$x = a \cos \frac{S}{c}, \quad y = a \sin \frac{S}{c}, \quad z = \frac{bs}{c}$$

$$K_1 = |R'|$$

$$R': \quad x' = -\frac{a}{c} \sin \frac{S}{c}, \quad y' = \frac{a}{c} \cos \frac{S}{c}, \quad z' = \frac{b}{c}$$

$$R'': \quad x'' = -\frac{a}{c^2} \cos \frac{S}{c}, \quad y'' = -\frac{a}{c^2} \sin \frac{S}{c}, \quad z'' = 0$$

$$K_1 = |R'| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2} \quad \text{د.د.}$$

$$K_2 = -B \cdot N$$

$$N = \frac{T'}{|T'|} = (-\cos \frac{S}{c}, -\sin \frac{S}{c}, 0)$$

$$\{T = R' \Rightarrow T' = R''\}$$

$$B = T \times N = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\frac{a}{c} \sin \frac{S}{c} & \frac{a}{c} \cos \frac{S}{c} & \frac{b}{c} \\ -\cos \frac{S}{c} & -\sin \frac{S}{c} & 0 \end{vmatrix}$$

$$|T'| = \sqrt{\frac{a^2}{c^4}} = \frac{a}{c^2}$$

$$B = \left( \frac{b}{c} \sin \frac{S}{c}, -\frac{b}{c} \cos \frac{S}{c}, \frac{a}{c} \right)$$

$$B' = \left( \frac{b}{c^2} \cos \frac{S}{c}, \frac{b}{c^2} \sin \frac{S}{c}, 0 \right)$$

$$K_2 = \frac{b}{c^2} \cos^2 \frac{S}{c} + \frac{b}{c^2} \sin^2 \frac{S}{c} = \frac{b}{c^2} \quad \text{د.د.}$$